جامعة البعث | تحليل عقدي /1/ | اسم الطالب:

كلية العلوم – قسم الرياضيات | الفصل الأول للعام الدراسي 2016 – 2017

السؤال الأول:(10 + 10 + 10 + 10 + 10 = 50 درجة)

1"– إذا كان $z = x + iy$ و $|x| < \frac{\pi}{4}$ ، فأثبت أنَّ $|\tan z| < 1$.

2"– اعتماداً على الدوال العكسية أوجد حلول المعادلة $\sin z = 3$.

3"– إذا كان $-\frac{15\pi}{4} < \phi < -\frac{7\pi}{4}$, $|z| > 0$; $\log z = Log|z| + i\phi$ ، فأوجد $\log(-1+i)^2$, $2\log(-1+i)$ ، ثمَّ قارن بينهما.

4"– إذا كان $f(z) = x^3 + i(y+1)^3$ ، ففي أي النقاط تكون الدالة قابلة للاشتقاق وفي أي النقاط تكون تحليلية.

5"– إذا كان $u(x,y) = y^2 - x^2 + x + y$ ، فأثبت أنَّ هذه الدالة توافقية ، ثمَّ أوجد المرافق التوافقي لها ، ثمَّ عبر عن الدالة $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ بدلالة z.

السؤال الثاني: (10 + 10 + 30 = 50 درجة)

1"– أوجد خيال القطعة المستقيمة $y = 1$, $0 \le x \le 2$ وفق التحويلة $\omega = z^2$.

2"– أوجد التحويلة الخطية الكسرية التي تنقل النقاط $z_1 = -i$, $z_2 = \infty$, $z_3 = 0$ فوق النقاط $\omega_1 = \infty$, $\omega_2 = -2i$, $\omega_3 = i$ على الترتيب.

3"– احسب قيمة التكاملين الآتيين:

$$I_1 = \int_{|z|=4} \frac{2z-3}{z^3 - 3z^2 + 4} dz \qquad , \qquad I_2 = \int_{|z|=\frac{3}{2}} \frac{e^{2z}}{z(z-1)^2(z^3+8)} dz$$

انتهت الأسئلة

مدرس المقرر: د. رامز الشيخ فتوح

السؤال الأول:

أولاً: إذا كان $z = x + iy$ و $|x| < \dfrac{\pi}{4}$ ، فأثبت أنَّ $|\tan z| < 1$.

الحل:

لدينا:

$$|\tan z| = \left|\frac{\sin z}{\cos z}\right| = \frac{|\sin z|}{|\cos z|}$$

وبفرض أنَّ $z = x + iy$، نعلم أنَّ:

$$|\sin z|^2 = \sin^2 x + \mathrm{sh}^2 y \qquad , \qquad |\cos z|^2 = \cos^2 x + \mathrm{sh}^2 y$$

ونعلم أنَّ:

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} \qquad , \qquad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2} \qquad , \qquad \mathrm{sh}^2 y = \frac{\mathrm{ch}2y - 1}{2}$$

ومنه فإنَّ:

$$\sin^2 x + \mathrm{sh}^2 y = \frac{1-\cos 2x}{2} + \frac{\mathrm{ch}2y - 1}{2} = \frac{\mathrm{ch}2y - \cos 2x}{2}$$

$$\cos^2 x + \mathrm{sh}^2 y = \frac{1+\cos 2x}{2} + \frac{\mathrm{ch}2y - 1}{2} = \frac{\mathrm{ch}2y + \cos 2x}{2}$$

وبالتالي فإنَّ:

$$|\tan z| = \sqrt{\frac{\sin^2 x + \mathrm{sh}^2 y}{\cos^2 x + \mathrm{sh}^2 y}} = \sqrt{\frac{\mathrm{ch}2y - \cos 2x}{\mathrm{ch}2y + \cos 2x}}$$

وبما أنَّ $|x| < \dfrac{\pi}{4}$ فإنَّ: $-\dfrac{\pi}{4} < x < \dfrac{\pi}{4}$ ، وبالتالي $-\dfrac{\pi}{2} < 2x < \dfrac{\pi}{2}$ ومنه فإنَّ: $\cos 2x > 0$ وبالتالي:

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{ch}2y - \cos 2x < \mathrm{ch}2y \\ \mathrm{ch}2y + \cos 2x > \mathrm{ch}2y \;\Rightarrow\; \dfrac{1}{\mathrm{ch}2y + \cos 2x} < \dfrac{1}{\mathrm{ch}2y} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\mathrm{ch}2y - \cos 2x}{\mathrm{ch}2y + \cos 2x} < \frac{\mathrm{ch}2y}{\mathrm{ch}2y} = 1$$

$$\frac{\mathrm{ch}2y - \cos 2x}{\mathrm{ch}2y + \cos 2x} < 1 \;\Rightarrow\; \sqrt{\frac{\mathrm{ch}2y - \cos 2x}{\mathrm{ch}2y + \cos 2x}} < 1$$

وبالتالي نجد أنَّ:

$$|\tan z| = \sqrt{\frac{\mathrm{ch}2y - \cos 2x}{\mathrm{ch}2y + \cos 2x}} < 1$$

ثانياً: اعتماداً على الدوال العكسية أوجد حلول المعادلة $\sin z = 3$.

الحل:

بما أنَّ:

$$\sin z = 3 \;\Rightarrow\; z = \arcsin(3)$$

ونعلم أنَّ:

$$\arcsin(\omega) = \log\left(i\,\omega + \sqrt{1-\omega^2}\right)$$

وبالتالي فإنَّ:

$$\arcsin(3) = -i\,\log\left(3i + \sqrt{1-9}\right) = -i\,\log\left(3i \pm 2\sqrt{2}i\right) = -i\,\log\left[\left(3 \pm 2\sqrt{2}\right)i\right]$$

وبما أنَّ:

$$\log\left[\left(3 \mp 2\sqrt{2}\right)i\right] = \log\left|\left(3 \pm 2\sqrt{2}\right)i\right| + i\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)$$

$$= \log\left(3 \pm 2\sqrt{2}\right) + i\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) \quad ; \quad n = 0, \mp 1, \ldots.$$

فإنَّ:

$$\arcsin(3) = -i\,\log\left[\left(3 \pm 2\sqrt{2}\right)i\right] = \left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) - i\,\log\left(3 \pm 2\sqrt{2}\right)$$

$$= \left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) + i\,\log\left(\frac{1}{3 \pm 2\sqrt{2}}\right) = \left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) + i\,\log\left(\frac{3 \mp 2\sqrt{2}}{9-8}\right)$$

$$= \left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) + i\,\log\left(3 \mp 2\sqrt{2}\right) \quad ; \quad n = 0, \mp 1, \ldots.$$

وبالتالي فإنَّ حلول المعادلة المعطاة هي:

$$z = \arcsin(3) = \left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) + i\,\log\left(3 \mp 2\sqrt{2}\right) \quad ; \quad n = 0, \mp 1, \ldots.$$

ثالثاً: إذا كان $-\frac{15\pi}{4} < \phi < -\frac{7\pi}{4}$, $|z| > 0$; $\log z = Log|z| + i\phi$ ، فأوجد $\log(-1+i)^2$, $2\log(-1+i)$ ، ثمَّ قارن بينهما.

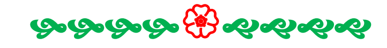
الحـل:

$$\log(-1+i)^2 = \log(-2i) = \log|-2i| + i\left(-\frac{5\pi}{2}\right) = \log(2) - i\left(\frac{5\pi}{2}\right)$$

$$2\left[\log(-1+i)\right] = 2\left[\log|-1+i| + i\left(-\frac{13\pi}{4}\right)\right] = 2\left[\log\sqrt{2} - i\,\frac{13\pi}{4}\right] = 2\log\sqrt{2} - i\,\frac{13\pi}{2} = \log(2) - i\left(\frac{13\pi}{2}\right)$$

وبالتالي نستنتج أنَّ:

$$\log(-1+i)^2 \neq 2\log(-1+i)$$



رابعاً: إذا كان $f(z)=x^3+i(y+1)^3$ ، ففي أي النقاط تكون الدالة قابلة للاشتقاق وفي أي النقاط تكون تحليلية.

الحل:

لدينا:

$$u(x,y)=x^3 \quad , \; v(x,y)=(y+1)^3$$

تكون الدالة $f(z)$ قابلة للاشتقاق إذا وفقط إذا كانت المشتقات الجزئية الأربعة لـ $u\,,v$ موجودة ومستمرة وتحقق شرطي كوشي ريمان:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=3x^2 \qquad \frac{\partial v}{\partial y}=3(y+1)^2$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=0 \qquad \frac{\partial v}{\partial x}=0$$

نلاحظ أن هذه المشتقات الجزئية موجودة ومستمرة عند كل نقطة من نقاط المستوي العقدي، وكذلك فإنَّ شرط كوشي ريمان الثاني محقق في جميع نقاط المستوي العقدي، والذي هو:

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}$$

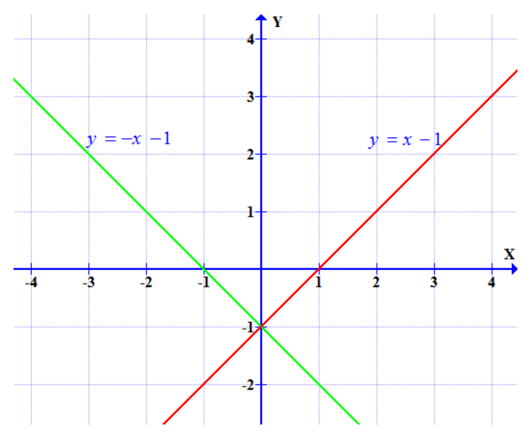
أما شرط كوشي ريمان الأول فيتحقق عندما:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow 3x^2=3(y+1)^2 \Rightarrow x^2=(y+1)^2 \Rightarrow x^2-(y+1)^2=0 \Rightarrow$$
$$(x+y+1)(x-y-1)=0$$

وهذه المساواة تكون محققة عندما:

$y=-x-1$ وهذه المعادلة تمثل معادلة مستقيم غير مار من مبدأ الإحداثيات.

أو عندما $y=x-1$ وهذه المعادلة تمثل معادلة مستقيم غير مار من مبدأ الإحداثيات.



لذلك فإنَّ الدالة تكون قابلة للاشتقاق عند كل نقطة من نقاط المستقيمين السابقين.

إنَّ هذه الدالة غير تحليلية عند أية نقطة من نقاط المستوي العقدي لأنه من أجل أي جوار لأية نقطة من نقاط المستقيمين السابقين، فإنَّ هذا الجوار سوف يحوي على نقاط تكون الدالة المعطاة قابلة للاشتقاق عند بعضها وغير قابلة للاشتقاق عند بعضها الآخر، لذلك الدالة المعطاة غير تحليلية عند أية نقطة من نقاط المستوي العقدي.

خامساً: إذا كان $u(x,y)=y^2-x^2+x+y$ ، فأثبت أنَّ هذه الدالة توافقية ، ثمَّ أوجد المرافق التوافقي لها ، ثمَّ عبر عن الدالة $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ بدلالة z.

الحل:

لكي تكون الدالة $u(x,y)$ توافقية يجب أن تكون المشتقات الجزئية من المرتبة الأولى والثانية موجودة ومستمرة ، والمشتقات من المرتبة الثانية تحقق معادلة لابلاس التفاضلية: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-2x+1 \quad , \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-2 \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y}=2y+1 \quad , \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=2$$

إنَّ هذه المشتقات الجزئية الأربعة موجودة ومستمرة عند كل نقطة من نقاط المستوي العقدي كما نلاحظ أنَّ:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-2+2=0$$

وهذا يعني أنَّ الدالة $u(x,y)$ هي دالة توافقية ، ولنوجد المرافق التوافقي بالشكل:

بفرض أنَّ الدالة $v(x,y)$ هي المرافق التوافقي للدالة $u(x,y)$ وبالتالي فهما يحققان شرطي كوشي ريمان ومنه استناداً إلى شرط كوشي ريمان الأول نجد أنَّ:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial y}=-2x+1$$

وبالمكاملة بالنسبة لـ y نجد أنَّ:

$$v(x,y)=-2xy+y+\varphi(x) \quad \cdots\cdots(*)$$

وباشتقاق طرفي العلاقة الأخيرة بالنسبة لـ x نجد أنَّ:

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-2y+\varphi'(x)$$

وبالاستفادة من شرط كوشي ريمان الثاني $\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}$:

$$-2y+\varphi'(x)=\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}=-(2y+1)=-2y-1 \Rightarrow -2y+\varphi'(x)=-2y-1$$

$$\varphi'(x)=-1 \Rightarrow \varphi(x)=-x+c$$

وبالتعويض في العلاقة $(*)$ نجد أنَّ:

$$v(x,y)=-2xy+y-x+c$$

وهي دالة المرافق التوافقي للدالة التوافقية $u(x,y)$ ، وبالتالي نجد انَّ الدالة التحليلية $f(z)$ تملك الشكل:

$$f(z)=u(x,y)+i\,v(x,y)=\left(y^2-x^2+x+y\right)+i\left(-2xy+y-x+c\right)$$

وبما أنَّ الدالة $f(z)$ تحليلية فإنَّه للتعبير عن الدالة $f(z)$ بدلالة z نستبدل كل x بـ z وكل y بصفر فنجد أنَّ:

$$f(z)=\left(z-z^2\right)+i\left(-z+c\right)=-z^2+(1-i)z+ic$$

السؤال الثاني:

أولاً: أوجد خيال القطعة المستقيمة $y=1\ ,\ 0\le x\le 2$ وفق التحويلة $\omega=z^2$.

الحل:

بفرض $z=x+iy$, $\omega=u+iv$ عندئذٍ فإن:

$$\omega=z^2 \Rightarrow u+iv=(x+iy)^2=(x^2-y^2)+i(2xy)$$

ومن تساوي عددين عقديين نجد أنَّ:

$$u=x^2-y^2 \quad , \quad v=2xy$$

وبما أنَّ $y=1$ نعوض في العلاقتين السابقتين لنجد أنَّ:

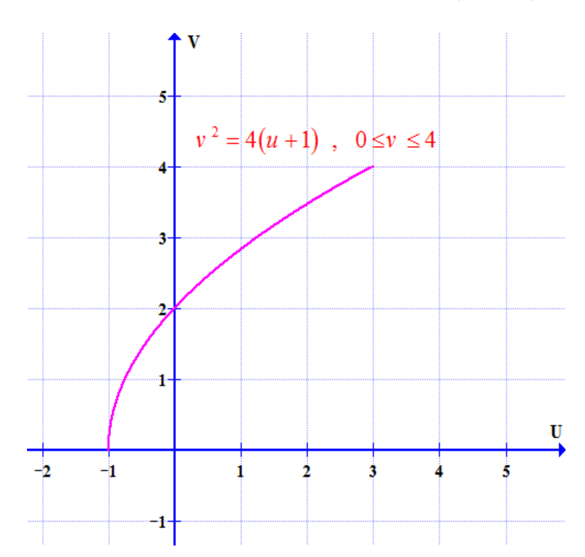
$$u=x^2-1 \quad \cdots\cdots(1)$$
$$v=2x \quad \cdots\cdots(2)$$

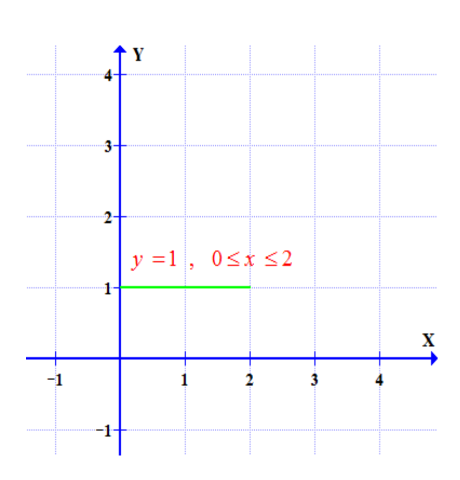
ولدينا: $0\le x\le 2$ ومنه فإنَّ: $0\le v=2x\le 4$ ، ومن (2) لدينا: $x=\frac{1}{2}v$ نعوض في (1) فنجد أنَّ:

$$u=\frac{1}{4}v^2-1 \Rightarrow v^2=4(u+1)$$

وهي معادلة قطع مكافئ ذروته $(-1,0)$ ومحوره المحرقي هو المحور OU وتقعره نحو الاتجاه الموجب من هذا المحور، مما سبق نستنتج الخيال هو جزء من القطع المكافئ:

$$v^2=4(u+1) \quad , \quad 0\le v\le 4$$





ثانيـــــــاً: أوجـد التحويلـة الخطيـة الكسـرية التـي تنقـل النقـاط $z_1=-i$, $z_2=\infty$, $z_3=0$ فـوق النقـاط $\omega_1=\infty$, $\omega_2=-2i$, $\omega_3=i$ على الترتيب.

الحل:

تملك التحويلة الخطية الكسرية الشكل الآتي:

$$\frac{(\omega-\omega_1)}{(\omega-\omega_3)}\cdot\frac{(\omega_2-\omega_3)}{(\omega_2-\omega_1)}=\frac{(z-z_1)}{(z-z_3)}\cdot\frac{(z_2-z_3)}{(z_2-z_1)}$$

بما أنَّ $z_2=\infty$ نبدل في التحويلة كل z_2 بـ $\frac{1}{z_2}$ ومن ثمَّ نوحد المقامات ونختصر، وبعد ذلك نبدل z_2 بالصفر.

بما أنَّ $\omega_1=\infty$ نبدل في التحويلة كل ω_1 بـ $\frac{1}{\omega_1}$ ومن ثمَّ نوحد المقامات ونختصر، وبعد ذلك نبدل ω_1 بالصفر.

$$\frac{(\omega\omega_1-1)}{(\omega-\omega_3)}\cdot\frac{(\omega_2-\omega_3)}{(\omega_2\omega_1-1)}=\frac{(z-z_1)}{(z-z_3)}\cdot\frac{(1-z_2z_3)}{(1-z_2z_1)}$$

وبالتالي فإنَّ:

$$\frac{(0-1)}{(\omega-i)}\cdot\frac{(-2i-i)}{(0-1)}=\frac{(z+i)}{(z-0)}\cdot\frac{(1-0)}{(1-0)}\Rightarrow\frac{-3i}{(\omega-i)}=\frac{(z+i)}{z}\Rightarrow\omega-i=\frac{-3i\,z}{z+i}\Rightarrow$$

$$\omega=\frac{-3i\,z}{z+i}+i=\frac{-3i\,z+i\,z-1}{z+i}=\frac{-2i\,z-1}{z+i}\quad\Rightarrow\boxed{\omega=\frac{-2i\,z-1}{z+i}}$$

ثالثاً: احسب قيمة التكاملين الآتيين:

$$I_1=\int_{|z|=4}\frac{2z-3}{z^3-3z^2+4}dz\qquad,\qquad I_2=\int_{|z|=\frac{3}{2}}\frac{e^{2z}}{z(z-1)^2(z^3+8)}dz$$

التكامل الأول:

$$I_1=\int_{|z|=4}\frac{2z-3}{z^3-3z^2+4}dz$$

الحل: إنَّ النقاط الشاذة للدالة المستكملة هي جذور معادلة المقام أي جذور المعادلة:

$$z^3-3z^2+4=0$$

ومن الواضح أنَّ المعادلة الأخيرة تقبل $z=-1$ جذراً لها، وللحصول على الجذرين الآخرين نقسم z^3-3z^2+4 على $(z+1)$ فنجد أن ناتج القسمة هو $z^2-4z+z=(z-2)^2$ وبالتالي فإنَّ الجذرين المتبقيين هما جذور المعادلة $(z-2)^2=0$ أي $z=2$ هو جذر مضاعف.

إنَّ النقاط الشاذة هي $z=-1\ ,\ z=2$ جميعها تقع ضمن الكفاف $|z|=4$ أي ضمن الدائرة التي مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها يساوي 4، وبالإضافة إلى ذلك فإن الدالة المكاملة هي من الشكل $\frac{p(z)}{q(z)}$ ودرجة المقام أكبر من درجة البسط بـ 2، وبالتالي نستنتج أنَّ قيمة هذا التكامل تساوي الصفر.

التكامل الثاني:

$$I_2=\int_{|z|=\frac{3}{2}}\frac{e^{2z}}{z(z-1)^2(z^3+8)}dz$$

الحل: إنَّ النقاط الشاذة للدالة المستكملة هي جذور معادلة المقام أي جذور المعادلة:

$$z(z-1)^2(z^3+8)=0$$

وبالتالي فإنَّ:

$$z=0\ ,\ (z-1)^2=0\Rightarrow z=1$$

وهذه الجذور تقع دخل الكفاف المغلق $C:|z|=\dfrac{3}{2}$ والذي هو الدائرة التي مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها يساوي $\dfrac{3}{2}$، بالإضافة إلى جذور المعادلة:

$$z^3+8=0$$

والتي هي من الشكل: $z_k\ ;k=0,1,2$ والتي تحقق أنَّ: $|z_k|=\sqrt[3]{|-8|}=2>\dfrac{3}{2}$، وهذه الجذور تقع خارج الدائرة المذكورة.

نحيط النقطة $z_1=0$ بدائرة C_1 نصف قطرها صغير بقدر كافٍ، ونحيط النقطة $z_2=1$ بدائرة C_2 نصف قطرها صغير بقدر كافٍ بحيث يتحقق $C_1\cap C_2=\phi\ \ ,\ C_2\cap C=\phi\ \ ,\ C_1\cap C=\phi$ وبالتالي اعتماداً على مبرهنة كوشي جورسات للمناطق متعددة الترابط نجد أنَّ:

$$\int_{|z|=\frac{3}{2}}\frac{e^{2z}}{z(z-1)^2(z^3+8)}dz=\int_{C_1}\frac{\frac{e^{2z}}{(z-1)^2(z^3+8)}}{(z-0)}dz+\int_{C_2}\frac{\frac{e^{2z}}{z(z^3+8)}}{(z-1)^2}dz\quad \cdots\cdots(*)$$

واعتماداً على صيغة تكامل كوشي:

$$\int_C\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz=\frac{2\pi i}{n!}f^{(n)}(z_0)$$

نجد أنَّ:

$$\int_{C_1}\frac{\frac{e^{2z}}{(z-1)^2(z^3+8)}}{(z-0)}dz=\frac{2\pi i}{0!}\left[\frac{e^{2z}}{(z-1)^2(z^3+8)}\right]_{z=0}=2\pi i\left(\frac{1}{8}\right)$$

$$\int_{C_2}\frac{\frac{e^{2z}}{z(z^3+8)}}{(z-1)^2}dz=\frac{2\pi i}{1!}\left[\frac{e^{2z}}{z(z^3+8)}\right]'_{z=1}=2\pi i\left[\frac{2z(z^3+8)e^{2z}-(4z^3+8)e^{2z}}{z^2(z^3+8)^2}\right]_{z=1}$$

$$=2\pi i\left[\frac{2e^2}{27}\right]$$

وبالاستفادة مما سبق والتعويض في العلاقة $(*)$ نجد أنَّ قيمة التكامل هي:

$$I_2=2\pi i\left[\frac{1}{8}+\frac{2e^2}{27}\right]$$

ملاحظة هامة: هذا الحل يعبِّر عن رأي كاتبه وقد يحتمل الخطأ.